Lumière et Milieux à Gradient d'Indice

Auteur : Pierre Lepetit
Rédaction : Bernard Lempel

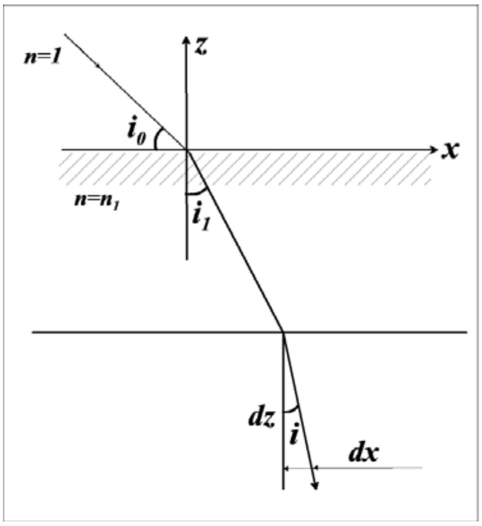
1. Trajectoire de la lumière dans un milieu plan à gradient linéaire d'indice de réfraction.

Avertissement: *Malgré tout le soin apporté à la transcription du travail de l'auteur de ces démonstrations mathématiques, des erreurs peuvent toujours subsister. Nous vous invitons à nous les signaler sans hésiter. Nous les corrigerons aussi rapidement que possible*. (Bernard Lempel)

Remerciements: *À Monsieur Pierre Lepetit pour cet excellent travail.* B. Lempel

1. TRAJECTOIRE DE LA LUMIERE DANS UN MILIEU PLAN A GRADIENT D'INDICE DE REFRACTION.

On considère un milieu plan formé de couches superposées d'indice variable croissant continûment de la couche la moins profonde, à la plus profonde.



$$\eta \sin i = cte = K = \sin i_0$$

$$\sin i_0 = \eta_1 \sin i_1$$

On écrit :

$$tg\ i = -\frac{dx}{dz} = \frac{\sin i}{\sqrt{1-\sin^2 i}} = \frac{\eta \sin i}{\sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 i}} = \frac{K}{\sqrt{n^2 - K^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{K}\right)^2 - 1}}$$

D'où :

$$[1] \qquad dx = \frac{-dz}{\sqrt{\left(\frac{n}{K}\right)^2 - 1}} \qquad \textit{avec } n = n(z)\textit{, fonction décroissante de } z.$$

On pose :

$$\frac{n}{K} = ch\ \varphi \qquad \frac{dn}{K} = sh\varphi\ d\varphi = \left(\frac{dn}{dz}\right)\frac{dz}{K} \Rightarrow dz = K\left(\frac{dz}{dn}\right) sh\varphi\ d\varphi \quad [2]$$

Par suite :

$$[1] \text{ et } [2] \Rightarrow dx = \frac{-K\frac{dz}{dn} sh\varphi\ d\varphi}{\sqrt{ch^2\varphi - 1}} = -K\frac{dz}{dn} d\varphi \qquad [3]$$

Or n est fonction de z donc est également fonction de z

Supposons la loi linéaire. $n = n_1 - \alpha z$ (croissante car $z < 0$)

Alors $\boxed{\frac{dn}{dz} = -\alpha}$ Et à partir de [3] α et K Etant des constantes $dx = \frac{K}{\alpha} d\varphi$ [4]

En intégrant [4] on obtient, $x = \dfrac{K}{\alpha}\varphi + Cte$ et $n = n_1 - \alpha\, z = K\ ch\varphi$

Pour z = 0, x = 0, $n = n_1$ (premier indice)

Donc $ch\ \varphi_0 = \dfrac{n_1}{K}$ $\varphi_0 = Arg\ ch\left(\dfrac{n_1}{K}\right)$

et $x = 0 = \dfrac{K}{\alpha} Arg\ ch\left(\dfrac{n_1}{K}\right) + Cte \Rightarrow Cte = -\dfrac{K}{\alpha} Arg\ ch\dfrac{n_1}{K}$

Par suite $\boxed{x = \dfrac{K}{\alpha}\left(-Arg\ ch\left(\dfrac{n_1}{K}\right) + \varphi\right)}$ Ou $\boxed{\varphi = Arg\ ch\dfrac{n_1}{K} + \dfrac{\alpha x}{K}}$

or $z = \dfrac{n_1 - n}{\alpha}$ $z = \dfrac{n_1}{\alpha} - \dfrac{K}{\alpha} ch\ \varphi$

Donc $\boxed{z = -\dfrac{K}{\alpha} ch\left[Arg\ ch\dfrac{n_1}{K} + \dfrac{\alpha x}{K}\right] + \dfrac{n_1}{\alpha}}$

Posons: $\text{Ƶ} = z - \dfrac{n_1}{\alpha} = -\dfrac{K}{\alpha} ch\left[\dfrac{\alpha}{K}(x - \lambda)\right] = -\dfrac{K}{\alpha} ch\ X$ X = x-λ

Avec $\lambda = -\dfrac{K}{\alpha} Arg\ ch\dfrac{n_1}{K}$

$\text{Ƶ} = z - \dfrac{n_1}{\alpha}$ $\text{Ƶ} = -\dfrac{K}{\alpha} ch\ X$

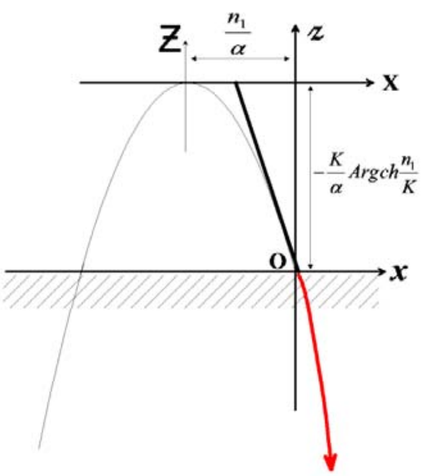
$X = \dfrac{\alpha}{K}(x - \lambda)$

Chaînette de sommet

Ƶ = 0

X = 0

$\eta = n_1 - \alpha\, z$



Le sommet de la **chaînette** est à : $z_0 = \dfrac{n_1}{\alpha}$ et $x_0 = -\dfrac{K}{\alpha} Arg\ ch\dfrac{n_1}{K}$ avec $K = Sin\ i_0$